

Hálózatszámítás mátrix-módszerrel

Bemutatás feladatmegoldásban

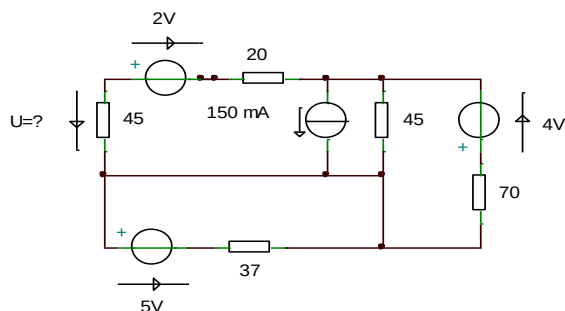
2013.11.05.
Villamosmérnök, informatika tanár
Zimmermann József

Tartalom

Szuperpozíció-tétel alkalmazása	2
Mátrix-módszer	7
Hurokáramok módszere	7
Csomóponti potenciálok módszere	11
Ellenőrzés szimulációs programmal.....	13
Feszültséggenerátoros megvalósítás.....	13
Áramgenerátoros kivitel.....	13

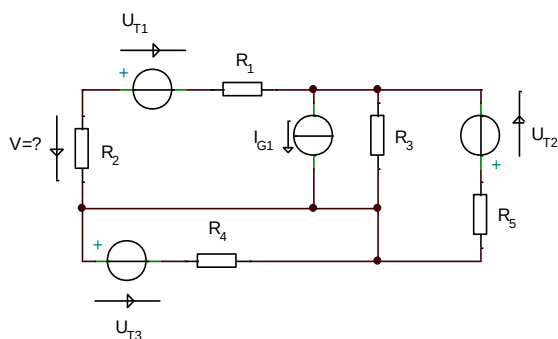
Határozza meg az ábrán bejelölt R_2 , 45 Ω -os ellenállás feszültségét az ismert adatokból.

A feladatot először szuperpozíció-tétellel, majd mátrix-módszerrel oldjuk meg, végül a megoldásokat szimulációs programmal ellenőrizzük le.



1. áramkör

Megoldáshoz a generátorokat tervjelezzük fel.



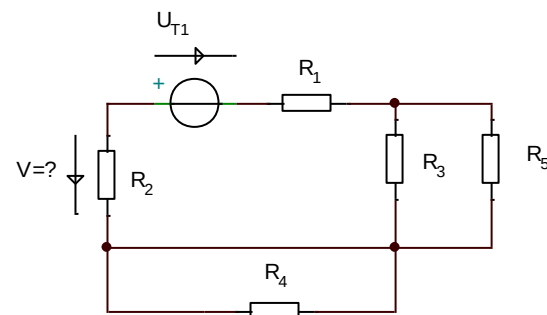
2. áramkör

Szuperpozíció-tétel alkalmazása

A szuperpozíció alkalmazásában, generátoronként kell kiszámolni R_2 feszültségét, majd mérőirány szerint összegezzük. Generátoronkénti vizsgálat azt jelenti, hogy a egy aktív generátor mellett a többi feszültséggenerátor feszültségmentes (rövidzár), az áramgenerátor árammentes (szakadás) állapotú.

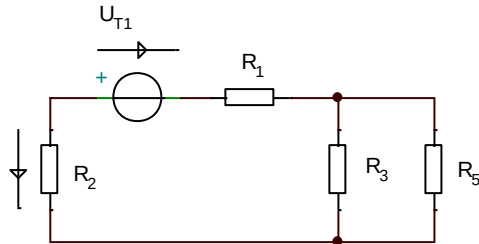
Az U_{T1} generátorral gerjesztett áramkör

Az U_{T1} generátor forrásfeszültségének hatása az R_2 ellenálláson, a többi a feszültséggenerátort rövidzárral, az áramgenerátort szakadással helyettesítjük. Az egyszerűsített kapcsolás a 3. áramkör.



3. áramkör

Vegyük figyelembe az R_4 ellenállással párhuzamosan meglévő rövidzárat, ami az R_4 ellenállás értékét lenullázza, ezt figyelembe véve felrajzolhatjuk az újabb, egyszerűbb 4.áramkör-i kapcsolást.



4. áramkör

Feszültségosztó egyszerűsített kapcsolását kapjuk, ha U_{T1} feszültséggenerátort felcseréljük R_2 -vel, így rajzolhatjuk meg az 5.áramkört. Sorba kapcsolt elemeknél ezt megtehetjük, mert ugyan az az áram folyik rajtuk keresztül, ami az eredeti és új helyen ugyan azt a feszültségosztást hozza létre. Az áramkör a szokványos feszültségosztó tükörképe, mert az R_2 ellenállás a felsőtag helyén van, a bemeneti feszültséget U_{T1} adja, a kimenetét az R_2 -n lévő U_{R2} feszültség. A számolás feszültségosztás elvét veszi figyelembe, ahol U_{R2} az alsótag, a többi a felső.

Ezek után

$$U_{R2}^I = U_{T1} \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_1 + R_3 \times R_5}$$

$$U_{R2}^I = 2 \cdot \frac{45}{45 + 20 + 45 \times 70} = \frac{90 \cdot 115}{65 \cdot 115 + 45 \cdot 70}$$

$$U_{R2}^I = \frac{10350}{10625} = 0,9741V$$

Ellenőrzésként kiszámoljuk a többi ellenálláson lévő feszültséget.

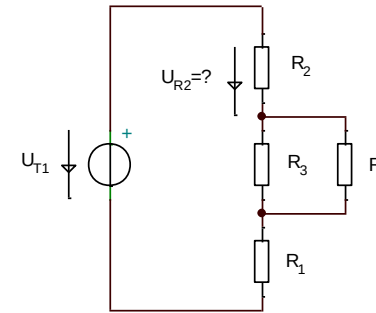
$$U_{R3 \times R5 + R1} = \frac{[R_1 + (R_3 \times R_5)]}{R_2 + [R_1 + (R_3 \times R_5)]}$$

$$U_{R1, R3, R5} = 2 \cdot \frac{20 \cdot 115 + 45 \cdot 70}{65 \cdot 115 + 45 \cdot 70} = \frac{10900}{10625} = 1,0259V$$

Az alsó és felsőtag feszültségértékének összege az U_{T1} értékét kell adja

$$U_{T1} = U_{R2}^I + U_{R1, R3, R5} = 0,9741 + 1,0259 = 2V$$

Lerajzolva az egyenletnek megfelelő rajzot

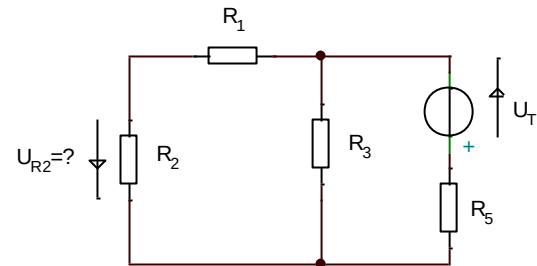


5. áramkör

Az U_{T1} generátor + póluspontjából induló áram az R_2 ellenálláson a képzeletben bejelölt hurokiránnyal egyező feszültséget hoz létre, összegzéskor előjelét pozitívnak kell felvenni.

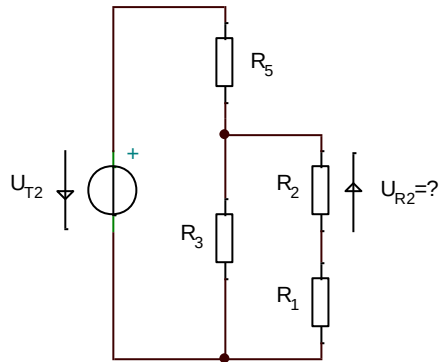
Az U_{T2} generátorral gerjesztett áramkör.

Következő az U_{T2} generátor egyedüli hatása, R_2 feszültségére.



6. áramkör

A kapcsolást a 6. áramkör adja, aminek ekvivalens áramköre 7. áramkör, ahol kiemelttem U_{T2} forrást. Az áramkörben R_2 egy párhuzamos ellenálláskapcsolás egyik ágának eleme, abból is csak részfeszültséget birtokol.



7. áramkör

Ezért két lépésben határozzuk meg R_2 feszültségét, először a két csomópont közötti értéket, majd azt, hogy ez a feszültség milyen arányban oszlik meg R_2 és R_1 ellenállásokon.

A csomópontok közötti feszültség R_3 , U_{R3} feszültsége.

$$U_{R3} = U_{T2} \cdot \frac{R_3 \times (R_1 + R_2)}{R_5 + R_3 \times (R_1 + R_2)}$$

Az R_2 ellenállás U_{R2} feszültsége, jelöljük U_{R2}^{II} -vel, mivel U_{T2} feszültséggenerátor hatására jött létre.

$$U_{R2}^{II} = U_{R3} \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Helyettesítve U_{R3} -at

$$U_{R2}^{II} = U_{R3} \frac{R_2}{R_1 + R_2} = U_{T2} \cdot \frac{R_3 \times (R_1 + R_2)}{R_5 + R_3 \times (R_1 + R_2)} \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Helyettesítve az értékeket.

$$U_{R2}^{II} = 4 \cdot \frac{45 \times 65}{70 + 45 \times 65} \cdot \frac{45}{65} = 4 \cdot \frac{45 \cdot 45}{70 \cdot 110 + 45 \cdot 65} = \frac{8100}{10625} = 0,7624V$$

Ellenőrzés:

$$U_{R1} = U_{R3} \frac{R_1}{R_1 + R_2} = U_{T2} \cdot \frac{R_3 \times (R_1 + R_2)}{R_5 + R_3 \times (R_1 + R_2)} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$U_{R1} = 4 \cdot \frac{45 \times 65}{70 + 45 \times 65} \cdot \frac{20}{65} = \frac{4 \cdot 45 \cdot 20}{70 \cdot 110 + 45 \cdot 65} = \frac{3600}{10625} = 0,3388V$$

Az R_3 feszültsége összegzés után.

$$U_{R3} = U_{R1} + U_{R2} = 0,7624 + 0,3388 = 1,1012V$$

Feszültségosztásból

$$U_{R3} = U_{T2} \cdot \frac{R_3 \times (R_1 + R_2)}{R_5 + R_3 \times (R_1 + R_2)} = 4 \cdot \frac{45 \times 65}{70 + 45 \times 65} = 4 \cdot \frac{\frac{45 \cdot 65}{45 + 65}}{70 + \frac{45 \cdot 65}{45 + 65}}$$

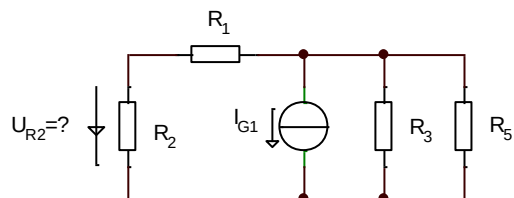
$$U_{R3} = \frac{4 \cdot 45 \cdot 65}{70 \cdot 110 + 45 \cdot 65} = \frac{11700}{10625} = 1,10117 \approx 1,1012V$$

Az U_{T2} gerjesztés hatására a mérőiránnyal ellentétes feszültség jön létre.

$$U_{R2}^{II} = -0,7624V$$

Az I_{G1} áramgenerátorral gerjesztett áramkör

Az I_{G1} áramgenerátorral vizsgálva U_{R2} feszültségét, ehhez is elkészíthetjük a szükséges rajtot.



Az áramkört követve, az I_{G1} árama egyrészt az R_2R_1 soros tag felé, másrészt az R_3R_5 párhuzamos tag felé indul. Áramosztóval számolható I_{R2} árama.

$$I_{R2}^{III} = I_{G1} \frac{R_3 \times R_5}{R_1 + R_2 + R_3 \times R_5}$$

$$I_{R2}^{III} = 0,15 \cdot \frac{45 \times 70}{65 + 45 \times 70} = \frac{0,15 \cdot 45 \cdot 70}{65 \cdot 115 + 45 \cdot 70} = \frac{472,5}{10625} = 44,47 \text{ mA}$$

$$I_{R3R5} = I_{G1} \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_1 + R_2 + R_3 \times R_5}$$

$$I_{R3R5} = 0,15 \cdot \frac{65 \cdot 115}{65 \cdot 115 + 3150} = \frac{1121,25}{10625} = 105,53 \text{ mA}$$

A két áram összegének az I_{G1} áramát kell adnia.

$$I_{G1} = I_{R2}^{III} + I_{R3R5} = 44,47 + 105,53 = 150 \text{ mA}$$

Az ellenállás feszültsége

$$U_{R2}^{III} = I_{R2}^{III} \cdot R_2$$

$$U_{R2}^{III} = 44,47 \text{ mA} \cdot 45 \Omega = 2,00115 \text{ V}$$

Helyettesítve az áramra kapott egyenletet.

Ellenőrzés

$$U_{R1,R2} = I_{R2} \cdot (R_1 + R_2) = 0,04447 \cdot 65 = 2,89055 \text{ V}$$

$$U_{R3,R5} = I_{R3R5} \cdot (R_3 \times R_5) = 0,10553 \cdot \frac{45 \cdot 70}{45 + 70} = \frac{332,4195}{115} = 2,8906 \text{ V}$$

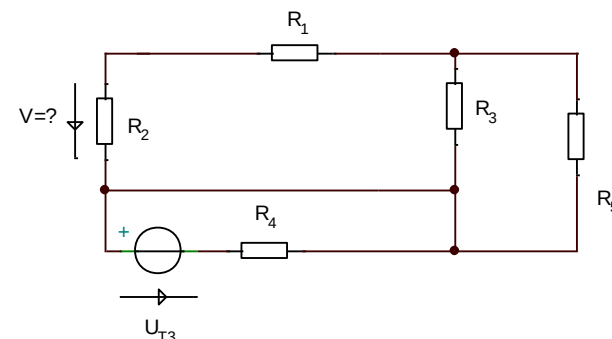
$$U_{R1,R2} = U_{R3,R5}$$

A kapcsolási rajzról meggyőződhetünk, hogy I_{G1} részaráma ellentétes irányú a felvett mérőiránnyal, így az negatív előjelű.

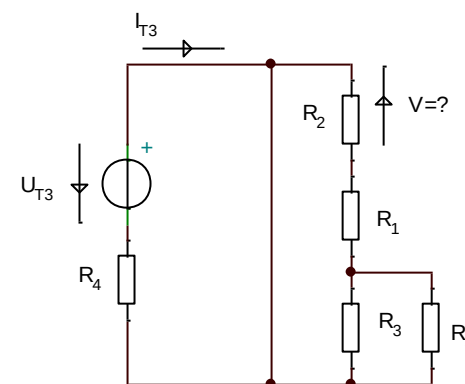
$$U_{R2}^{III} = -2,00115 \text{ V}$$

Az U_{T3} generátorral gerjesztett áramkör

A negyedik hurok elemzéséhez szükséges rajz a következő.



Egy rövidzár található az ellenállás hálózatban. Átszerkesztve a kapcsolást még szemléletesebb a rövidzár hatása.



A rajz magyarázatot ad arra, hogy R_2 feszültségére miért nincs hatással U_{T3} generátor feszültsége. A rövidzár miatt, mert annak ellenállása nulla. Felírva a rövidzár (0) és az R_2, R_1, R_3, R_5 ellenállásokkal alkotott párhuzamos eredőt,

$$R_e = 0 \times (R_2 + R_1 + R_3 \times R_5) \\ R_e = \frac{0 \cdot (R_2 + R_1 + R_3 \times R_5)}{0 + (R_2 + R_1 + R_3 \times R_5)} = \frac{0}{(R_2 + R_1 + R_3 \times R_5)} = 0$$

nulla értéket kapunk.

A nulla eredő miatt az U_{T3} árama csak a rövidzáron folyik, R_2 feszültségét nem befolyásolja.

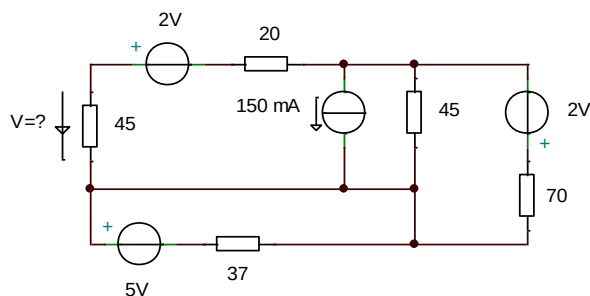
A megállapított mérőirány szerinti összegzésben az U_{T1} , az U_{T2} és az I_{G1} generátorok gerjesztése állítja be R_2 feszültségét.

$$U_{R2} = U_{R2}^I + U_{R2}^{II} + U_{R2}^{III} = 0,9741 - 0,76,24 - 2,00115 = \underline{\underline{-1,78945V}}$$

Mátrix-módszer

Hurokáramok módszere

Számolja ki mátrix-módszerrel a bejelölt ellenállás feszültségét.



Megoldás:

A megoldás annak a felismerésén alapul, hogy a Kirchhoff –féle hurokban egy áramot, a hurokáramot határozzunk meg az elemen átfolyó tényleges áram(ok) segítségével. A hurokra felírt egyenlet egy lineáris egyenlet, több hurok esetén lineáris egyenletrendszer. A hurokokra felírt egyenletek szabályos elrendezésűek, mivel a megoldáshoz annyi egyenletet kell felírni ahány ismeretlen van. Cramer szabály segítségével tetszőleges lineáris egyenletrendszer megoldható, ha a mátrix teljesíti a következő feltételeket

$$A \cdot x = b \quad (A \in M_{k \times n}, x \in M_{n \times 1}, b \in M_{k \times 1})$$

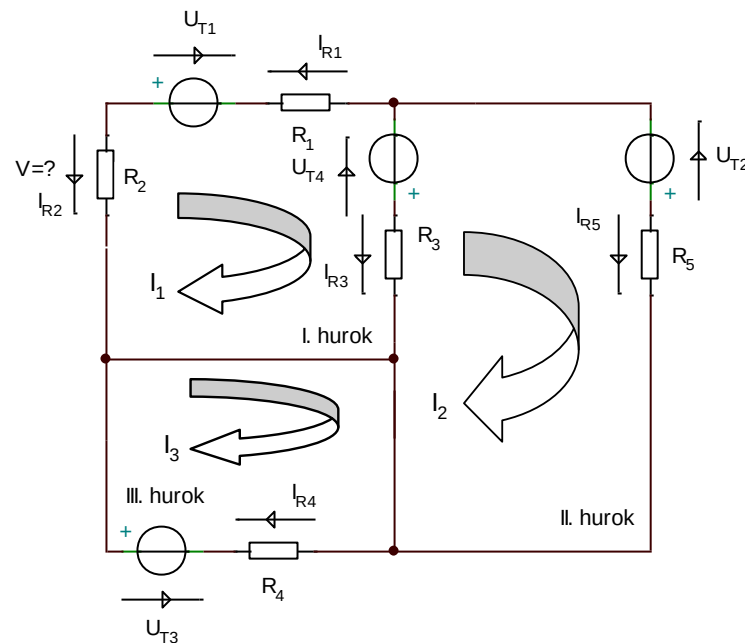
A feltétel nem zárja ki azt, ha négyzetes mátrixról van szó,
 $k = n$

Írjuk fel a Cramer szabály által követelt mátrixot, ahol **A** az együtthatómátrix, **x** a változó, **b** a szabadtág. A két utolsó mátrix oszlopmátrixok.

Ellenállás hálózatokban a feszültség értéke egyenlő az ellenállás és az áram szorzatával. Ha a feszültségforrás a szabadtág, az ellenállások értékei az együtthatók és a hurokáram a változó, akkor a szabályos mátrixként felírható.

Először vegyünk fel egy hurokirányt, és fejezzük ki a tényleges áramértékeket a hurokárammal. A felírásban a feszültségforrásokat szabadtagnak vesszük, ezért

minden forrás feszültségforrásnak tekintünk. Az I_{G1} áramgenerátort U_{T4} -re alakítjuk át.



Az elemeken lévő áramok felírásakor, figyelembe kell venni az áramok irányát. Az áramköri elemek áramai a hurokárammal egyezők, és más huroknak nem tagjai, akkor pozitív, ha ellentétes negatív előjelű. Ha más huroknak is tagja, akkor minden hurokáramot figyelembe veszünk, egyezőség esetén pozitív ellentétes irány esetén negatív előjelű és úgy írjuk fel, mint egy egyenletet.

I. hurok.

A hurok elemei R_2 , U_{T1} , R_1 , U_{T4} és R_3 . A feszültséggenerátorok a szabadtágok lesznek, a többi elem a következő: R_1 , R_2 , R_3

Kirchhoff huroktörvénye a hurokirány szerinti előjelképzést írja elő, ami egyezés esetén pozitív, ellentétes irány esetén negatív. A hurok irányt a hurok árammal (I_1) vettük fel.

$$U_{T1} - I_{R1} \cdot R_1 - U_{T4} + I_{R3} \cdot R_3 - I_{R2} \cdot R_2 = 0$$

Az elemek áramait, és a hurok áram kapcsolatát úgy vizsgáljuk, hogy a vizsgált ellenállás tagja e más huroknak vagy sem. Ha nem tagja, akkor összevetjük a gerjesztés által keletkezett áram és a hurok áram irányát. Előjelének eldöntése már ismert. Az R_1 és R_2 ellenállás csak az I. hurok tagja, árama ellentétes irányú a hurok árammal

$$I_{R2} = -I_1$$

$$I_{R1} = -I_1$$

Az R_3 ellenállás tagja az I. és II. huroknak is. Rajta átfolyó áram (I_{R3}) a két hurok áram eredője. Az I_{R3} iránya egyező az I_1 -el, de ellentétes az I_2 -vel

$$I_{R3} = I_1 - I_2$$

A III. hurokkal nincs kapcsolata az I. huroknak, illetve nulla kapcsolata van, tehát az ellenállás értéke nulla.

$$0 = 0 \cdot I_3$$

A felírt hurokegyenletbe helyettesítsük be az elemek áramai helyére a hurok áramokat.

$$U_{T1} - (-I_1) \cdot R_1 - U_{T4} + (I_1 - I_2) \cdot R_3 - (-I_1) \cdot R_2 = 0$$

Felbontva a zárójelet és a kiemeléseket elvégezve a rendezett egyenletünk leírhatjuk.

$$U_{T1} + I_1 \cdot R_1 - U_{T4} + I_1 \cdot R_3 - I_2 \cdot R_3 + I_1 \cdot R_2 = 0$$

Az első hurok egyenletét felírtuk az együtthatók (ellenállások) és a változók (hurok áramok) szorzataként, illetve a szabadtagokat (feszültségforrások) átvittük a jobboldalra. A harmadik hurok együtthatója nulla, mivel nincs közös eleme az I. hurokkal, de nullát bármely egyenlethez hozzáadhatunk.

$$(R_1 + R_2 + R_3) \cdot I_1 - R_3 \cdot I_2 + 0 \cdot I_3 = U_{T4} - U_{T1}$$

II. hurok

A hurok elemei U_{T2} , R_5 , R_3 és U_{T4} . A szabadtagok U_{T2} és U_{T4} , a változó a hurok áram I_2 . A hurok egyenlete, figyelembe véve az áramirányokat.

$$U_{T4} - U_{T2} + R_5 \cdot I_{R5} - R_3 \cdot I_{R3} = 0$$

Az együtthatók áramai a hurok árammal felírva.

$$I_{R5} = I_2$$

$$I_{R3} = I_1 - I_2$$

Helyettesítjük az egyenletbe

$$U_{T4} - U_{T2} + R_5 \cdot I_2 - R_3 \cdot (I_1 - I_2) = 0$$

Rendezzük az első hurokban leírtak szerint. Figyelembe vesszük, hogy ez a hurok sincs kapcsolatban a III. hurokkal ezért áramának és nulla együtthatójának szorzata nulla.

$$-R_3 \cdot I_1 + (R_3 + R_5) \cdot I_2 + 0 \cdot I_3 = U_{T2} - U_{T4}$$

III. hurok

A hurok elemei U_{T3} , R_4 . A szabadtag U_{T3} , a változó I_3 .

A hurok egyenlete,

$$-U_{T3} + I_{R4} \cdot R_4 = 0$$

A hurok együtthatója az R_4 , áramát felírjuk a hurok árammal.

$$I_{R4} = I_3$$

Helyettesítve az egyenletbe.

$$0 \cdot I_1 + 0 \cdot I_2 + I_{R4} \cdot R_4 = U_{T3}$$

Ahol a nullaértékű együtthatókra már adtam magyarázatot.

Most már felírhatjuk az $A \cdot x = b$ alakú mátrixunkat.

Az együtthatók $A_{n \times n}$ alakú mátrixa nem más, mint az együtthatók, $R_{3 \times 3}$ alakú felírása. Az első oszlopban az I_1 , a második oszlopban az I_2 , a harmadik oszlopban az I_3 változóval szorzott együtthatók vannak.

$$\begin{vmatrix} R_1+R_2+R_3 & -R_3 & 0 \\ -R_3 & R_5+R_3 & 0 \\ 0 & 0 & R_4 \end{vmatrix}$$

együtthatók

A változó $x_{n \times 1}$ alakot az $I_{3 \times 1}$ változó adja.

$$\begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} I_2 \\ I_3 \end{vmatrix}$$

változók

A szabadtagok b oszlopát a feszültséggenerátorok adják.

$$\begin{vmatrix} U_{T4}-U_{T1} \\ U_{T2}-U_{T4} \\ U_{T3} \end{vmatrix}$$

szabadtagok

A változókkal szorzott együtthatók adják a szabadtagokat, ami most az áramok és ellenállások szorzata a feszültséget.

$$\begin{vmatrix} R_1+R_2+R_3 & -R_3 & 0 \\ -R_3 & R_5+R_3 & 0 \\ 0 & 0 & R_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} U_{T4}-U_{T1} \\ U_{T2}-U_{T4} \\ U_{T3} \end{vmatrix}$$

együtthatók változók szabadtagok

A felírt mátrix jellemzésére megadhatjuk a következő adatokat

$$R \cdot I = U_T \quad (R \in M_{n \times n}; I, U_T \in M_{n \times 1})$$

Az R együtthatók szabályos négyzetes mátrixot alkotnak, sor és oszlop egyezőséggel. Most $n = 3$. Változókat tartalmazó mátrix oszlop mátrix (I) egyező az együtthatómátrix sorazonosságával. A szabadtagok oszlopmátrixa is „n” mennyiségű.

A változókat (I_X) úgy határozzuk meg, hogy először az együtthatókból meghatározzuk a determinánst $|R|$, majd a szabadtagokkal képzett determinánst $|R_{UT}|$, amit úgy nyerünk, hogy a meghatározni kívánt változó együtthatóinak helyére behelyettesítjük a szabadtagokat. Ezenletünk

$$I_X = \frac{|R_{UT}|}{|R|}$$

A mátrix determinánst a Sarrus szabállyal számoljuk ki, ami kimondja, hogy a mátrix főátlójában lévő elemek szorzatából kivonjuk a mellékátlóban lévő elemek

szorzatát. Az átlókat úgy kaphatjuk meg, ha az első két oszlopot a meglévő mátrix mellé rendeljük.

Határozzuk meg az együtthatók determinánsát.

$$|R| = \begin{vmatrix} R_1+R_2+R_3 & -R_3 & 0 \\ -R_3 & R_5+R_3 & 0 \\ 0 & 0 & R_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} R_1+R_2+R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_5+R_3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Az átlók meghatározása, amit megjelölünk. A bejelölt nyíllal összefogott elemek szorzata, majd a nyilak összege adja az átló értékét.

A főátló számítása.

$$|R| = \begin{vmatrix} R_1+R_2+R_3 & -R_3 & 0 \\ -R_3 & R_5+R_3 & 0 \\ 0 & 0 & R_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} R_1+R_2+R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_5+R_3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$|R|_{\text{főát}} = [(R_1 + R_2 + R_3) \cdot (R_5 + R_3) \cdot R_4] + [(-R_3) \cdot 0 \cdot 0] + [0 \cdot (-R_3) \cdot 0]$$

$$|R|_{\text{fő-átl}} = (R_1 + R_2 + R_3) \cdot (R_5 + R_3) \cdot R_4$$

Mellékátló számítása

$$|R|_{\text{m-átl}} = \begin{vmatrix} R_1+R_2+R_3 & -R_3 & 0 \\ -R_3 & R_5+R_3 & 0 \\ 0 & 0 & R_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} R_1+R_2+R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_5+R_3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$|R|_{\text{m-átl}} = [0 \cdot (R_5 + R_3) \cdot 0] + [(R_1 + R_2 + R_3) \cdot 0 \cdot 0] + [(-R_3) \cdot (-R_3) \cdot R_4]$$

Az ellenállás együtthatók determinánsa

$$|R| = |R|_{\text{fő-átl}} - |R|_{\text{m-átl}}$$

$$|R| = [(R_1 + R_2 + R_3) \cdot (R_5 + R_3) \cdot R_4] - [(-R_3) \cdot (-R_3) \cdot R_4]$$

Értéke

$$|R| = [(20 + 45 + 45) \cdot (70 + 45) \cdot 37] - [(-45) \cdot (-45) \cdot 37] = 468050 - 74925 = \underline{\underline{393125}}$$

A változó értékét úgy kapjuk, ha a szabadtagok oszlopát helyettesítjük a kereset változó együttható oszlopával. Az R_2 ellenálláson I_1 hurokáram folyik, ezért a csere együtthatómátrix első oszlopára vonatkozik.

$$|R_{UT}| = \begin{vmatrix} U_{T4}-U_{T1} & -R_3 & 0 \\ U_{T2}-U_{T4} & R_5+R_3 & 0 \\ U_{T3} & 0 & R_4 \end{vmatrix}$$

Számoljuk ki a determináns értékét

$$|R_{UT}| = \begin{vmatrix} U_{T4}-U_{T1} & -R_3 & 0 \\ U_{T2}-U_{T4} & R_5+R_3 & 0 \\ U_{T3} & 0 & R_4 \end{vmatrix}$$

$$|R_{UT}|_{f\ddot{o}_atl} = [(U_{T4} - U_{T1}) \cdot (R_5 + R_3) \cdot R_4] + [(-R_3) \cdot 0 \cdot U_{T3}] + [0 \cdot (U_{T2} - U_{T4}) \cdot 0]$$

$$|R_{UT}|_{f\ddot{o}_atl} = (U_{T4} - U_{T1}) \cdot (R_5 + R_3) \cdot R_4$$

A mellékátló kiszámítása

$$|R_{UT}| = \begin{vmatrix} U_{T4}-U_{T1} & -R_3 & 0 \\ U_{T2}-U_{T4} & R_5+R_3 & 0 \\ U_{T3} & 0 & R_4 \end{vmatrix}$$

$$|R_{UT}|_{m_atl} = [0 \cdot (R_5 + R_3) \cdot U_{T3}] + [U_{T4} - U_{T1} \cdot 0 \cdot 0] + [(-R_3) \cdot (U_{T2} - U_{T4}) \cdot R_4]$$

$$|R_{UT}|_{m_atl} = (-R_3) \cdot (U_{T2} - U_{T4}) \cdot R_4$$

A determináns

$$|R_{UT}|_{m_atl} = |R_{UT}|_{f\ddot{o}_atl} - |R_{UT}|_{m_atl}$$

$$|R_{UT}| = [(U_{T4} - U_{T1}) \cdot (R_5 + R_3) \cdot R_4] - [(-R_3) \cdot (U_{T2} - U_{T4}) \cdot R_4]$$

Értéke

$$|R_{UT}| = [(6,27 - 2) \cdot (70 + 45) \cdot 37] - [(-45) \cdot (4 - 6,75) \cdot 37]$$

$$|R_{UT}| = 20211,25 - 4578,75 = \underline{\underline{15632,5}}$$

Az I_1 változó értéke

$$I_1 = \frac{|R_{UT}|}{|R|} = \frac{15632,5}{393125} = 0,039765A$$

A keresett feszültség

$$U_{R2} = I_1 \cdot R_2 = 0,039765A \cdot 45\Omega = \underline{\underline{1,789425V}}$$

A mért feszültség előjelét az

$$I_{R2} = -I_1$$

egyenlőség határozza meg. A kapott eredményben I_1 értéke pozitív, akkor az egyenletet -1-el beszorozva kapjuk a

$$-I_{R2} = I_1$$

Helyettesítve a számított értékbe, a tényleges feszültségirány negatív értékű

$$U_{R2} = -I_{R2} \cdot R_2 = -0,039765A \cdot 45\Omega = \underline{\underline{-1,789425V}}$$

A szuperpozícióval és a mátrix-számítási módszerrel kiszámolva R_2 ellenállás feszültségére azonos értéket kaptunk.

A mátrix együtthatóinak felírása igen egyszerű, mivel azok az ellenállások melyeken csak a saját hurokárama folyik mindig pozitív, a sajátán kívül egy szomszéd hurok áram is jelen van akkor a gerjesztés által keltett áram és a hurok áramok irányát külön-külön összehasonlítva állapítjuk meg az egyenletet. A hurokáramnak tehát kettős jelentése van, egyrészt ennek figyelembe vételével írjuk fel a hurokegyenletet, másrészt iránya szerint fejezzük ki az ellenállások áramait.

A mátrix-módszer alkalmazásakor is figyelembe vehető a III. hurok semleges hatása U_{R2} feszültségére.

A mátrix 2x2-re zsugorodik.

$$\begin{vmatrix} R_1+R_2+R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_5+R_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} U_{T4}-U_{T1} \\ U_{T2}-U_{T4} \end{vmatrix}$$

együtthatók változók szabadtagok

Helyettesítve

$$|R| = \begin{vmatrix} 110 & -45 \\ -45 & 115 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4,75 \\ -2,75 \end{vmatrix}$$

Számoljuk ki a R együtthatók determinánsát

$$|R| = \begin{vmatrix} 110 & -45 \\ -45 & 115 \end{vmatrix}$$

$$|R| = (110 \cdot 115) - (-45 \cdot -45) = 12650 - 2025 = \underline{10625}$$

I_1 kiszámításához együtthatóit cseréljük le a szabadtagokra

$$|R_{UT}| = \begin{vmatrix} 4,75 & -45 \\ -2,75 & 115 \end{vmatrix}$$

$$|R_{UT}| = (4,75 \cdot 115) - (-45 \cdot -2,75) = 422,5$$

$$I_1 = \frac{|R_{UT}|}{|R|} = \frac{422,5}{10625} = 0,039765A$$

Az R_2 ellenállás feszültsége

$$U_{R2} = I_1 \cdot R_2 = 0,039765 \cdot 45 = 1,7894V$$

A hurokáram irány most is ellentétes R_2 áramával, figyelembe $I_1 = -I_{R2}$ véve azt a feszültségünk negatív, ami egyező a számítottakkal.

$$U_{R2} = -I_{R2} \cdot R_2 = -0,039765 \cdot 45 = -1,7894V$$

Csomóponti potenciálok módszere

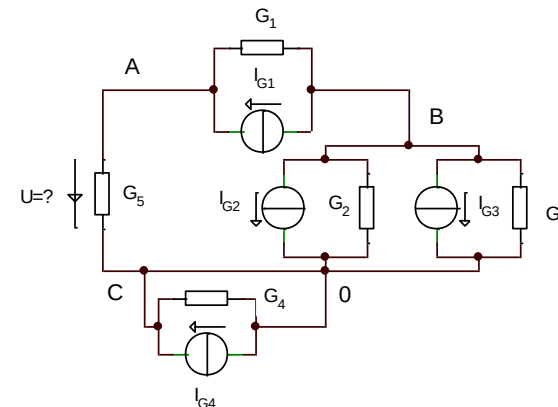
Előzőekben megvizsgáltuk a hurokra felírható egyenleteinket, most ugyanezt a feladatot a csomóponti törvény mátrix felírására tesszük meg. Az előző feladatban ismert volt a gerjesztésre alkalmazott feszültséggenerátor, a változónak a hurokáramot tekintettük. Az együtthatók és a változók szorzata a szabadtagot kellett adja. Az együttható az ellenállás, a változó az áram, a szabadtag a feszültség akkor a szorzás eredménye az Ohm törvénye. Most a gerjesztést áramgenerátorok adják, keressük a csomóponti potenciál értékét. A mátrix szorzatnak megint Ohm törvényét kell teljesítenie ezért áramgenerátorral, vezetéssel fogunk számolni. Ohm törvényét vezetéssel felírva

$$I = \frac{U}{R} \text{ ha } \frac{1}{R} = G \text{ akkor } G \cdot U = I$$

A mátrixra vonatkozó követelményeket a következő egyenlet fogja össze.

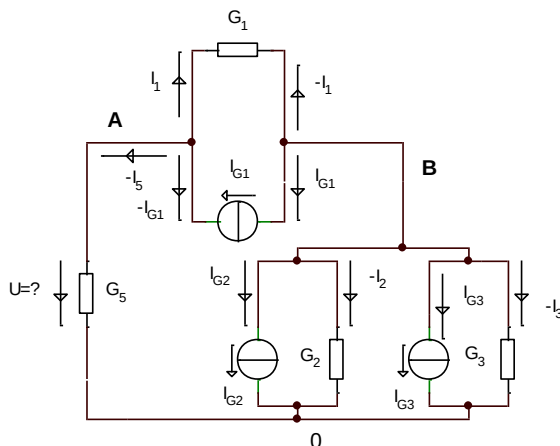
$$G \cdot U = I_G \quad (G \in M_{n \times n}; U, I_G \in M_{n \times 1})$$

Az átalakított kapcsolási rajzunk csak áramgenerátort és vezetést tartalmaz.



Jelöltük a csomópontokat $\{A, B, C, 0\}$ nagybetűkkel, illetve 0-nak referenciapotenciál értéket adtam. A kapcsolási rajzon a C és 0 potenciál azonos

értékű és rövidere zárja az I_{G4} , G_4 elemeket, ami a keresett G_5 vezetés feszültségét nem befolyásolja.



Fontos a mérőirány felvétele. Kényelmes a helyzet a B csomópontban, mert két áramgenerátor G_2 és G_3 párhuzamosan kapcsolt, mindkét árama a belsővezetésekén záródik, de egy részük a „0” referencia ponton keresztül a G_5 ellenállás feszültségét befolyásolja. A mérőirányt úgy vesszük fel, hogy az áramirányok a csomópontból a referenciapont felé legyenek irányítottak, tehát a csomópontból induljanak. Ha az utóbbi kijelentés igaz, akkor pozitív, ha nem akkor negatív előjelű. Az áramgenerátorok áramai (I_{G1} , I_{G2} , I_{G3}) B csomópontból indulnak tehát pozitív előjelűek. A belső vezetései ezért ellentétes az áramirány ($-I_1$, $-I_2$, $-I_3$), vagyis negatív értékűek. Az A csomópontban az I_{G1} áramgenerátor a csomópontba halad, a jelöléssel ellentétes, tehát negatív. Ha a B csomópontban I_1 árama negatív és a G_1 vezetésen halad át, akkor az A csomópontból induló I_1 iránya helyes tehát pozitív. Kérdéses a G_5 áramiránya, ami az I_{G2} és I_{G3} összegzett értéke miatt pozitívabb, mint az I_{G1} oldalon, tehát az I_5 előjele negatív. A csomópontok egyenletei a kapcsolási rajzból felírva.

Az A csomópont áramai:

$$I_1 - I_5 - I_{G1} = 0$$

B csomópont áramai.

$$-I_1 + I_{G1} + I_{G2} - I_2 + I_{G3} - I_3 = 0$$

A vezetés áramait most kifejezzük a csomóponti feszültség és a vezetés szorzataként.

$$I_1 = G_1 \cdot (U_{B0} - U_{A0})$$

A G_1 vezetés az A és a B csomópont között van, ezért azok különbségét vesszük, mivel U_{B0} negatívabb, mint U_{A0} , a különbségképzésnél ezt figyelembe vesszük.

$$I_2 = G_2 \cdot U_{B0}$$

$$I_3 = G_3 \cdot U_{B0}$$

$$I_5 = G_5 \cdot U_{A0}$$

Az A csomópont áramai helyettesítéssel.

$$G_1(U_{B0} - U_{A0}) - G_5 \cdot U_{A0} - I_{G1} = 0$$

$$-G_1 \cdot U_{A0} + G_1 \cdot U_{B0} - G_5 \cdot U_{A0} - I_{G1} = 0$$

$$-(G_1 + G_5) \cdot U_{A0} + G_1 \cdot U_{B0} = I_{G1}$$

B csomópont helyettesítése

$$-G_1 \cdot (U_{B0} - U_{A0}) + I_{G1} + I_{G2} - G_2 \cdot U_{B0} + I_{G3} - G_3 \cdot U_{B0} = 0$$

$$G_1 \cdot U_{A0} - G_1 \cdot U_{B0} - G_2 \cdot U_{B0} - G_3 \cdot U_{B0} = -(I_{G1} + I_{G2} + I_{G3})$$

$$G_1 \cdot U_{A0} + (-G_1 - G_2 - G_3) \cdot U_{B0} = -(I_{G1} + I_{G2} + I_{G3})$$

Számoljuk ki a vezetések és az áramgenerátorok értékeit.

Áramgenerátorok áramai.

$$I_{G1} = \frac{U_1}{R_1} = \frac{2V}{20\Omega} = 0,1A = 100mA$$

$$I_{G2} = 0,15A = 150mA$$

$$I_{G3} = \frac{U_4}{R_4} = \frac{4V}{70\Omega} = 0,057143A = 57,143mA$$

A vezetések értékei:

$$G_1 = \frac{1}{R_1} = \frac{1}{20} = 0,05S = 50mS$$

$$G_2 = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{45} = 0,0222S = 22,22mS$$

$$G_3 = \frac{1}{R_3} = \frac{1}{70} = 0,014286S = 14,286mS$$

$$G_5 = \frac{1}{R_5} = \frac{1}{45} = 0,02222S = 22,22mS$$

Az egyenletrendszer két egyenlete,

$$-(G_1 + G_5) \cdot U_{A0} + G_1 \cdot U_{B0} = I_{G1}$$

$$G_1 \cdot U_{A0} - (G_1 + G_2 + G_3) \cdot U_{B0} = -(I_{G1} + I_{G2} + I_{G3})$$

Helyettesítésekkel.

$$-0,07222 \cdot U_{A0} + 0,05 \cdot U_{B0} = 0,1$$

$$0,05 \cdot U_{A0} - 0,086506 \cdot U_{B0} = -0,307143$$

A felírható mátrix

$$\begin{vmatrix} -0,07222 & 0,05 \\ 0,05 & -0,086506 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} U_{A0} \\ U_{B0} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,1 \\ -0,307143 \end{vmatrix}$$

A determináns értéke

$$|G| = \begin{vmatrix} -0,07222 & 0,05 \\ 0,05 & -0,086506 \end{vmatrix}$$

$$|G| = (-0,07222) \cdot (-0,086506) - (0,05) \cdot (0,05) = 0,006245733 - 0,0025 = \underline{\underline{0,0037457332}}$$

A szabadtag helyettesítéssel.

$$|G_{IG}| = \begin{vmatrix} 0,1 & 0,05 \\ -0,307143 & -0,086506 \end{vmatrix}$$

$$|G_{IG}| = -0,0086506 + 0,01535715 = 0,00670655$$

$$U_{A0} = \frac{|G_{IG}|}{|G|} = \frac{0,00670655}{0,00374746332} = 1,7896V$$

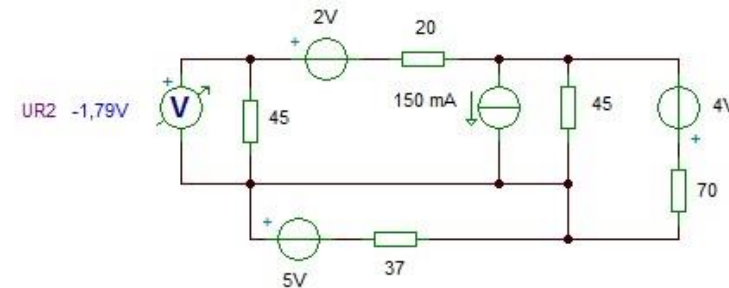
Az I_5 áram értéke negatív és tudjuk, hogy

$$-I_5 = G_5 \cdot (-U_{A0})$$

A képletből adódik, hogy a felvett mérőirány szerint a feszültség polaritása negatív.

$$-U_{A0} = -1,7896V$$

Ellenőrzés szimulációs programmal, a mért adat egyező a számítással
Feszültséggenerátoros megvalósítás a hurok-módszer igazolására.



Áramgenerátoros kivitel a csomóponti potenciál számítás igazolására

